Компьютерная алгебра — область математики, лежащая на стыке алгебры и вычислительных методов.

Компьютерная алгебра, является научной областью, которая относится к исследованию и разработке алгоритмов и программного обеспечения для манипулирования математическими выражениями и другими математическими объектами.

Компьютерная алгебра – это новая, быстро развивающиеся область, ориентированная на использовании ЭВМ для выполнения аналитических (не численных) преобразований математический выражений: полиномов, рядов, рациональных функций и т.д. В последнее время в широких кругах пользователей вычислительных машин различного класса стал достаточно популярным и широко используемым термин «компьютерная математика».

Математические объекты компьютерной алгебры.

Набор объектов, применяемых в символьных вычислениях, весьма разнообразен, в частности, в них используется значительно большее множество рациональных чисел. Это множество все равно остается конечным (в отличии от классической математики), но ограничения на допустимые размеры числа (количество знаков в его записи) связаны обычно с размерами памяти ЭВМ, что позволяет пользоваться практически любыми рациональными числами, операции над которыми выполняются за приемлемое время. При этом компьютерные операции над рациональными числами совпадают с соответствующими операциями в поле рациональных чисел. Таким образом, нивелируется проблема вычислительных методов — оценка погрешности вычислений.

В математике объектами являются алгебраические выражения, ряды, уравнения, векторы, матрицы и т.д.

В компьютерной алгебре рассматриваются следующие объекты:

- Полиномы

- Дифференциальные поля

- Логарифмические, тригонометрические функции.

- Матричные кольца и др.

С точки зрения математики объекты между собой не отличаются, разнится состоит лишь в физическом представлении и способе обработки объектов. Так, например, в компьютерной алгебре объекты обрабатываются в символьной форме, а решение достигается посредством некоторого вида алгебраизации задачи (например, производная от полинома определяется комбинаторным способом). Численные процедуры используют числа конечной точности, но существуют методы точного представления величин, определяемых через пределы. Компьютер работает с определенным набором численных методов для решения математических задач, в отличии от ручного решения, где можно встретить иные методы, более простые для человека. Также для компьютерной алгебры справедливо высказывание, что методы символьных вычислений и чисто численные алгоритмы обычно дополняют друг друга.

Компьютерная математика использует числа с плавающей точкой и целые числа фиксированной длинны, в отличии от чисел в обычной математике, где они не ограничены размером. В компьютерной алгебре рациональные числа могут быть представлены в виде дроби, состоящей из двух целых чисел (более точно, в виде записи, хранящей ссылку на список – числитель и ссылку на список – знаменатель).

Базовые объекты компьютерной алгебры

К базовым объектам относятся:

1. Целые числа
2. Рациональные числа
3. Полиномы от одной переменной
4. Полиномы от нескольких переменных
5. Рациональные функции

Возможны различные способы представлений целых чисел: ограниченной точности, когда количество цифр в целом числе задано; произвольно заданной точности, когда количество цифр в заданном числе можно менять, но только один раз – задавать перед вычислениями; неограниченной точности, когда количество цифр в числе не ограничивается никаким наперёд заданным числом, кроме ограничений, связанных с размером памяти машины.

Возможны различные способы представлений рациональных чисел произвольной точности: отношение числителя и знаменателя. Такое представление является нормальным. Проблема - для нормального представления необходимо распознавание идентичных чисел. Пример. Записи вида –2/3, 4/-6, и т.п. представляют одно и то же число. Но, сократив числа с помощью НОК и получив положительный знаменатель, получим каноническое число. Проблема - требуется вычисление НОД двух целых чисел произвольной точности. При большом количестве цифр в числах эта процедура является алгоритмически сложной. Тем более, её надо производить при каждом вычислении.

Полином от одной переменной представляет собой сумму мономов, иными словами – последовательность (или список). Коэффициенты мономов – числа разных типов, в том числе целые произвольной точности. Представление полинома является каноническим, если последовательность мономов упорядочена по возрастанию (или по убыванию) степени мономов. Полином можно хранить в плотном и в разреженном представлениях. В плотном представлении хранится: число мономов (определяемое как максимальная степень старшего монома плюс единица), и все, в том числе, нулевые коэффициенты мономов. Такое представление эффективно для алгоритмов преобразования полиномов, в которых число членов рядов для вычислений с повышением точности вычислений растет быстро и мало число нулевых членов. В разреженном представлении хранится последовательность (список), в каждом блоке которой хранится запись об одном ненулевом мономе, содержащая коэффициент монома и его степень. Различают две формы канонического представления полинома от нескольких переменных: форма с упорядочением последовательности мономов и рекурсивная форма.

Дробно-рациональные функции, представляющие отношение полиномов, эффективно хранить в виде записи, содержащей ссылку на полином - числитель и ссылку на полином – знаменатель. При этом полиномы должны находиться в одной канонической форме.

Представление алгебраических функций.

Алгебраическая функция – это функция, являющаяся решением уравнения: G ( x ) = 0 где G ( x ) – порождающий полином от одной переменной с коэффициентами – полиномами от нескольких переменных с целыми коэффициентами.

Пример. Полином G ( x ) = x^2 – 2 + y порождает алгебраическую функцию √(2 – y).

Если порождающий алгебраическую функцию полином неприводим, т.е. не разложим на множители (полиномы с целыми коэффициентами), то корни уравнения P (x) = 0 (алгебраические функции) независимы.

Простым радикалом называется положительная дробная степень от полинома с целыми коэффициентами, вложенным радикалом называется положительная дробная степень от выражения, содержащего радикалы.

Для представления простых радикалов (корней) необходимо ввести новую квазипеременную r1, обозначающую этот радикал, и в ее терминах выразить вхождение степеней этого радикала в другие выражения. При этом необходимо учитывать, что порождающий полином удовлетворяет условию P (r1) = 0. Чтобы выбранное представление стало каноническим, требуется разрешить неоднозначность дробно-рациональных отношений радикалов и разрешить вопрос независимости радикалов друг от друга (в случае работы с несколькими радикалами). Для вложенных радикалов представление к каноничной форме приводит к аналогичным проблемам.

Представление матриц.

Различают две формы представления матриц: двумерный массив и список списков.

Матрицы используют плотные представления, то есть хранятся все элементы матриц. В некоторых случаях матрицы упрощаются алгоритмами до разряженного представления (например, диагональная матрица).

В классической математике матрицы представляют собой двумерные структуры данных, в компьютерной математике матрица является ленточной структурой с указанием на каждый первый элемент строки.

Источники.

<http://mayoroven.ru/docum/intuit/course-301-html/>

<https://www.intuit.ru/studies/courses/3484/726/lecture/25605?page=4>

<https://en.wikipedia.org/wiki/Computer_algebra#Numbers>

<http://kspt.icc.spbstu.ru/media/files/2012/course/comp-algebra/CAS_L07.pdf>

<http://www.itlab.unn.ru/uploads/coa/coaBook.pdf>